На правах рукописи

ШАБАЛИН ПАВЕЛ ЛЕОНИДОВИЧ

ОСОБЫЕ СЛУЧАИ И ПРИЛОЖЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА

01.01.01. – математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Казань 2009

Работа выполнена на кафедре высшей математики Казанского государственного архитектурно-строительного университета.

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор
Салимов Расих Бахтигареевич.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Авхадиев Фарит Габидинович,
доктор физико-математических наук, профессор
Миклюков Владимир Михайлович,
доктор физико-математических наук, профессор
Семенко Евгений Вениаминович.

Ведущая организация: Институт математики с ВЦ УНЦ РАН

Защита состоится 19 ноября в час. мин. на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 в Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан " " 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук,
доцент Е.К. Липачев

Общая характеристика работы

1. Актуальность темы диссертации. Работа посвящена исследованию краевой задачи Гильберта теории аналитических функций с бесконечным индексом и счетным множеством точек разрыва первого рода ее коэффициентов и приложениям этой задачи к решению и исследованию геометрических свойств решений некоторых обратных и обратных смешанных краевых задач. Академик АН БССР Ф.Д. Гахов назвал [1] теорию краевых задач с бесконечным индексом как новую, принципиально важную и имеющую перспективу дальнейшего развития дисциплину. После выхода в свет основополагающих работ Н.В. Говорова, содержащих завершенное исследование краевой задачи Римана на луче с бесконечным индексом степенного порядка в случае одностороннего завихрения на бесконечности, различные случаи задачи Римана с бесконечным индексом были исследованы в работах П.Ю. Алекна, А.Г. Алехно, Ф.Н. Гарифьянова, М.И. Журавлевой, Б.А. Каца, В.Н. Монахова и Е.В. Семенко, И.В. Островского, И.Е. Сандрыгайло, М.Э. Толочко, Л.И. Чибриковой, П.Г. Юрова и других. При этом, следует признать, что теория краевой задачи Римана с бесконечным индексом далека от завершения, поскольку неизученными остались многочисленные ситуации поведения коэффициентов, при которых индекс задачи не существует.

Значительно меньшее число работ посвящено краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом. Многие результаты по разрешимости задачи Римана на вещественной оси могут быть использованы при решении задачи Гильберта для полуплоскости. Однако, непосредственное решение задачи Гильберта (без привлечения решения более сложной задачи Римана) особенно в случаях, когда задача Римана не исследована, представляется актуальным и целесообразным, что обусловлено как логикой развития теории так и приложениями задачи Гильберта к гидродинамике, например, к решению задачи об отражении плоских волн в упру-

[1]Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с., С.9

гой среде от плоской границы[2], к безмоментной теории оболочек[3]. А.В. Бицадзе[4] указал на применение решения задачи Гильберта к решению одной задачи теории дифференциальных уравнений с частными производными смешанного типа. Интересная связь краевой задачи Гильберта с коэффициентами, имеющими разрывы первого рода, с задачей по моделированию эффекта магнитного пересоединения в физике плазмы приведена в работе С.И. Безродных и С.И. Власова [5], применение задачи Гильберта с разрывами коэффициента к задаче взрыва приведено в работе Р.Б. Салимова и Н.К. Туктамышова [6]. С учетом сказанного следует считать тему диссертации актуальной и интересной.

2. Связь работы с крупными научными программами. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований 96-01-00110, 99-01-00366, 08-01-00381, 02-01-00168, 05-01-00523 и Фондом НИОКР РТ 05-5.1-48/2001(Ф), 05-5.3-136/2004Ф(05).

3. Цель и задачи исследования. Целью работы является исследование задачи Гильберта в некоторых неизученных ранее случаях обращения индекса в бесконечность, задачи Гильберта с бесконечным множеством точек разрыва коэффициентов и конечным индексом; построение формул общего решения в классах аналитических и ограниченных в верхней полуплоскости функций, либо функций , имеющих интегрируемые особенности в точках разрыва коэффициентов краевого условия и заданное асимптотическое поведение на бесконечности, получение необходимых и достаточных условий разрешимости этих задач; решение некоторых обратных смешанных краевых задач, их применение к отоб-

[2]Соболев С.Л. Об одной предельной задаче теории логарифмического потенциала и ее применении к отражению плоских упругих волн// Тр. Сейсм. ин-та. Л.: Изд-во АН СССР, 1930. № 11.

[3]Гольденвейзер А.Л. О применении решений задачи Римана – Гильберта к расчету безмоментных оболочек// Прикл. матем. и мех. – 1951.– Т. XV. – вып. 2. – С. 149–166.

[4]Бицадзе А.В. К общей задаче смешанноо типа// ДАН СССР. – 1951. – Т. 78. – № 4. – С. 621–624.

[5]Безродных С.И., Власов В.И. Сингулярная задача Римана–Гильберта на многоугольниках и ее приложения// Тезисы докладов международной конференции "Тихонов и современная математика".- Москва, 2006.- С.32.

[6]Салимов Р.Б., Туктамышов Н.К. Решение задачи Гильберта для кольца в особом случае и его применение к одной задаче взрыва// Матем. заметки. – 1999. – Т. 66. – Вып. 1. – С. 135–144.

ражению многоугольников с бесконечным числом вершин; построение достаточных условий однолистности аналитических функций и отображений; изучение возможности продолжения условия Гельдера для гармонической функции с границы внутрь области.

4. Научная новизна и значимость полученных результатов. Впервые решена задача Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов. При этом разобраны принципиально различные ситуации: ряд, составленный из скачков аргумента коэффициента краевого условия, сходится и индекс задачи конечен; указанный ряд расходится, но индекс задачи конечен; указанный ряд расходится и индекс задачи бесконечен. Исследованные до нас задачи Гильберта допускали только конечное число точек разрыва, а бесконечное значение индекса обуславливалось лишь особенностью степенного или логарифмического характера в бесконечно удаленной точке у аргумента коэффициента краевого условия – функции $\nu(t)$. Таким образом, изучен важный особый случай задачи Гильберта, особенность которого обусловлена наличием бесконечного множества точек разрыва коэффициентов задачи и неограниченным ростом непрерывной составляющей аргумента коэффициента краевого условия, исследовано влияние комбинации указанных факторов на разрешимость задачи.

Получено обобщение формулы интеграла Шварца-Кристоффеля на случай многоугольника с бесконечным числом вершин при принципиально иных ограничениях на величины углов многоугольника и на прообразы этих вершин при конформном отображении на полуплоскость, чем в работе И.А. Александрова[7].

Доказаны новые достаточные условия однолистности аналитических функций как в канонических, так и в произвольных областях с квазиконформной границей. Некоторые из этих результатов применены при исследовании однолистности отображений, решающих рассмотренные об-

[7]Александров И.А. Конформные отображения полуплоскости на область с симметрией переноса// Изв. вузов. Математика. – 1999. –№ 6. – С. 15-18.

ратные и смешанные обратные краевые задачи, тесно связанные с задачами Гильберта. Получены новые достаточные условия продолжимости условия Гельдера для гармонических функций с границы внутрь области.

5. Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Полученные в ней результаты по краевой задаче Гильберта с бесконечным множеством точек разрыва первого рода коэффициентов и с бесконечным индексом и разработанные методы их исследования могут найти применение при изучении краевых задач с еще не рассмотренными случаями поведения индекса, в решении некоторых новых обратных краевых задач и обратных смешанных краевых задач, а также при построении конформных отображений на области с полигональным участком границы (в том числе на области, ограниченные полигоном с бесконечным числом вершин). Полученные в третьей главе достаточные условия однолистности аналитических функций могут применяться при исследовании решений некоторых обратных и обратных смешанных краевых задач. Результаты диссертации могут быть использованы в научных коллективах, занимающихся исследованиями краевых задач для аналитических функций в Белорусском, Казанском, Новосибирском, Одесском, Харьковском университетах.

6. Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

Обобщение метода регуляризующего множителя Ф.Д. Гахова на случай задачи Гильберта с непрерывными на вещественной оси коэффициентами и бесконечным индексом степенного порядка.

Условия разрешимости и построение в квадратурах общего решения задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва первого рода коэффициентов в случае конечного индекса.

Получение формулы общего решения задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и бесконечным индексом в различных классах функций.

Обобщение на случай бесконечного множества вершин формулы интеграла Шварца–Кристофеля.

Условия однолистности функций, аналитических в звездообразных и выпуклых областях.

Условия продолжимости некоторых модулей непрерывности гармонических функций с границы внутрь области.

7. Личный вклад соискателя. Результаты диссертации опубликованы в 16 работах (11 – в изданиях, рекомендованных ВАК), среди которых 1 монография. Список работ приведен в конце автореферата. 12 работ (8 из списка ВАК) выполнены в соавторстве. При этом из 3 теорем работы [1] диссертанту принадлежит теорема 1, из 5 теорем работы [2] диссертанту принадлежит доказательство теоремы 1 для случая, когда $G_0 - \alpha-$ звездообразная область с неспрямляемой границей, теоремы 3,5 и лемма 1, из 4 теорем работы [3] – теоремы 1,2,4, из 2 теорем работы [4] - теорема 1, из 7 теорем работы [5] – теоремы 3,4,6,7, из 7 теорем работы [6] – теоремы 2,3,5,6,7, из 3 лемм и 6 теорем работы [7] – леммы 1, 3, теоремы 1,2,3,4,5, в [8] диссертанту при обосновании формулы отображающей функции принадлежит исследование асимптотического поведения интеграла типа Коши специального вида и доказательство существования одного несобственного интеграла, из 4 теорем работы [12] диссертанту принадлежат теоремы 2,4, а также лемма 1, в работе [13] диссертанту принадлежат теорема 9 и теорема 12(случай $j = 0$), в монографии [14] диссертанту принадлежат результаты пунктов 1.1, 1.4, 1.5, часть результатов п. 1.2 §1 главы 2, пункты 2.1, 2.6, 2.7, 2.8 часть результатов п.2.3, 2.5, 2.9 §2 главы 2, §3 главы 2, часть результатов п.2.2 §2 главы 3, часть результатов п.4.2 §4 главы 3, §5 главы 3. В работе [15] из 5 лемм и 5 теорем диссертанту принадлежат леммы 1-3 и теоремы 1, 2, 3, 5.

8. Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях:

- Первая всероссийская школа по основаниям математики и теории функций "Математические чтения памяти М.Я. Суслина". Саратов, 1989.

• Международная научная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Н.Г. Чеботарева. Казань, 1994.

• Школа - конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Б.М. Гагаева. Казань, 1997.

• Десятая межвузовская конференция "Математическое моделирование и краевые задачи". Самара, 2000.

• Международная научная конференция "Актуальные проблемы математики и механики". Казань, 2000.

• Казанская международная летняя школа-конференция. Казань, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009.

• Международная научная конференция "Геометрическая теория функций и краевые задачи". Казань, 2002.

• 12-я Саратовская зимняя школа. Саратов,2004.

• Международная школа-конференция "Геометрический анализ и его приложения". Волгоград, 2004.

• Международной конференция "Алгебра и анализ". Казань, 2004.

• Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа. Новосибирск, 2007.

• Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева. Новосибирск, 2008.

• 14-я Саратовская зимняя школа, посвященная памяти академика П.Л. Ульянова. Саратов, 2008.

• Шестая Всеросийская научная конференция "Математическое моделирование и краевые задачи"с международным участием. Самара, 2009.

В целом работа доложена на объединенном заседании кафедры математического анализа Казанского государственного университета, кафедры теории функций и приближений Казанского государственного университета, кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета и отделения математики НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

9. Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в 1 монографии, 15 статьях и 19 тезисах докладов.

10. Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на 12 параграфов и списка литературы, содержащего 135 наименования. Общий объем диссертации составляет 287 страниц.

Содержание работы

Во введении приводится постановка краевой задачи Гильберта: задачи определения аналитической в верхней полуплоскости D функции $F(z)$ по краевому условию на вещественной оси

$$a(t)\mathrm{Re}F(t) - b(t)\mathrm{Im}F(t) = c(t), \tag{1}$$

где $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$–заданные функции точки контура $L = \partial D$, которые называют коэффициентами и свободным членом задачи. Здесь обосновывается актуальность темы диссертации, приводится обзор предшествующих исследований и результатов автора.

Глава 1 Задача Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов

Глава первая посвящена краевой задаче Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов краевого условия. Методом регуляризующего множителя с аналитическим выделением особенностей коэффициентов получены формулы общего решения задачи Гильберта в ситуациях, когда разрывы коэффициентов краевого условия приводят к конечному, либо к бесконечному индексу.

В §1.1 изучается задача со счетным множеством точек разрыва коэффициентов краевого условия и конечным индексом κ. Индекс задачи здесь равен индексу коэффициента краевого условия $G(t) = a(t) - ib(t)$, т.е. деленному на π приращению аргумента $\nu(t)$ функции $G(t)$ при обходе контура L в положительном направлении. Отметим, что с такой комбинацией характеристик ни задача Гильберта, ни задача Римана не рассматривались. Изучены две возможные ситуации. В пунктах 1.1.1, 1.1.2 ряд, составленный из дробных частей скачков функции $\nu(t)/\pi = \arg G(t)/\pi$, $G(t) = a(t) - ib(t)$ сходится и индекс задачи конечен.

В пункте 1.1.1 рассмотрена задача об определении аналитической в верхней полуплоскости D функции $F(z)$ по краевому условию (1), которое выполняется на вещественной оси L всюду, кроме сгущающейся на бесконечности монотонной последовательности точек t_k, $t_k > 0$. В этих точках коэффициенты краевого условия $a(t)$, $b(t)$ и свободный член $c(t)$ имеют разрывы первого рода. Всюду в работе точки разрыва коэффициентов удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{\infty} t_i^{-1} < +\infty$. Функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)/|G(t)|$ непрерывны по Гельдеру на каждом интервале (t_k, t_{k+1}) включая концы, причем коэффициенты Гельдера ограничены в совокупности; в окрестности бесконечно удаленной точки условие Гельдера здесь и далее понимается в смысле выполнения неравенства вида $|a(t'') - a(t')| \leq K|1/t'' - 1/t'|^{\gamma}$, причем точки t', t'' берутся на одном интервале непрерывности коэффициентов краевого условия, и, наконец, $c(t)/|G(t)| = O(|t|^{-\gamma})$, $0 < \gamma < 1$, при $t \to \infty$.

Решение задачи (1) ищется в классе аналитических в верхней полуплоскости функций, имеющих интегрируемые особенности в точках t_k, и стремящихся к бесконечности порядка меньше единицы при $|z| \to \infty$ по некасательным путям.

При предположении существования конечных пределов

$$\lim_{t\to-\infty} \nu(t) = \nu(-\infty), \quad \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \varphi(+\infty), \tag{2}$$

где $\varphi(t) = \nu(t) - \beta(t)\pi$, $\beta(t)$ – кусочно постоянная функция, принимающая целые значения в интервалах (t_k, t_{k+1}), при которых число $\kappa_k = [\varphi(t_k+0) - \varphi(t_k-0)]/\pi$ удовлетворяло неравенству $0 \leq \kappa_k < 1$ и $\beta(t) = 0$ при $0 < t < t_1$, определим индекс задачи κ так, чтобы считая $\beta(t) = -\kappa$ при $t < 0$, скачок функции $\beta(t)$ в точке $t = 0$ был целым и выполнялось неравенство $0 \le \varphi(-\infty) - \varphi(+\infty) < \pi$.

Считается выполненным условие $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \kappa_k = \kappa_+$, вводятся функция

$$P_+(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{t_k}\Big)^{\kappa_k},$$

непрерывная функция

$$\phi(t) = \varphi(t) + \frac{\pi}{2} + \arg P_+(t) - (\kappa_\infty + \kappa_+) \arg(t+i) + \kappa_0 \arg \frac{t+i}{t} - \frac{\kappa - \kappa_0}{2} \arg \frac{t-i}{t+i},$$

и

$$K(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(\tau) d\tau}{\tau - z}.$$

Получена формула канонического решения задачи

$$F_0(z) = \frac{e^{iK(z)}}{P_+(z)(z+i)^{-\kappa_\infty - \kappa_+}} \Big(\frac{z-i}{z+i}\Big)^{(\kappa - \kappa_0)/2} \Big(\frac{z}{z+i}\Big)^{\kappa_0},$$

в которой $\kappa_0 = 0$, если $\kappa-$ четное и $\kappa_0 = -1$, $\kappa-$ нечетное число.

Доказано, что задача имеет стандартную картину разрешимости. Например, пусть κ – четное число, $\kappa_0 = 0$. Если $\kappa > 0$, то однородная задача имеет $\kappa + 1$ линейно независимых решений, неоднородная задача (1) безусловно разрешима и ее общее решение дается формулой

$$F(z) = F_0(z) \left\{ \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{c_2(\tau) d\tau}{\tau - z} + iB_0 + \sum_{k=1}^{\kappa/2} \Big[C_k \Big(\frac{z-i}{z+i}\Big)^k - \overline{C}_k \Big(\frac{z+i}{z-i}\Big)^k \Big] \right\},$$

$C_k = A_k + iB_k$ – произвольные комплексные постоянные, $A_0 = 0$.

Если κ – четное отрицательное число, то однородная задача неразрешима, а единственное решение неоднородной задачи представляется формулой

$$F(z) = \frac{-ie^{iK(z)}}{P_+(z)(z+i)^{-\kappa_\infty - \kappa_+}} \Big(\frac{z-i}{z+i}\Big)^{\kappa/2} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} c_2(\tau) \frac{d\tau}{\tau - z},$$

при выполнении условий разрешимости

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} c_2(\tau) \frac{d\tau}{(\tau - i)^k} = 0, \quad k = \overline{0, -\kappa/2 - 1}.$$

Аналогично разобран случай с нечетным κ.

В пункте 1.1.2 рассмотрена задача, коэффициенты краевого условия которой и свободный член $c(t)$, имеют разрывы первого рода в монотонных последовательностях точек $\{t_k\}$, $t_k > 0$, и $\{t_{-k}\}$, $t_{-k} < 0$, $k = \overline{1,\infty}$, $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$, $\lim_{k\to\infty} t_{-k} = -\infty$. Как и в предыдущем пункте индекс задачи конечен, ряды, составленные из κ_k и из $\kappa_{-k}-$ дробных частей скачков функции $\nu(t)/\pi$ в последовательностях точек $\{t_k\}$, $\{t_{-k}\}$, сходятся к κ_+, κ_- соответственно. Считаются выполненными условия

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{t_{-k-1}}{t_{-k}} = c_-, \quad 1 < c_-, \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{t_{k+1}}{t_k} = c_+, \quad 1 < c_+. \qquad (3)$$

Вводятся функции $P_+(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_k}\right)^{\kappa_k}, \quad P_-(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{t_{-k}})^{\kappa_{-k}}$, и

$$n_+^*(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \le \tau < t_1, \\ \sum\limits_{j=1}^{k-1} \kappa_j, & t_{k-1} \le \tau < t_k, \end{cases} \quad n_-^*(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \le \tau < -t_{-1}, \\ \sum\limits_{j=1}^{k-1} \kappa_{-j}, & -t_{-k+1} \le \tau < -t_{-k}, \end{cases}$$

на последние налагаются дополнительные условия

$$\kappa_- - n_-^*(\tau) = \frac{\alpha_-(\tau)}{\tau^\beta}, \ \kappa_+ - n_+^*(\tau) = \frac{\alpha_+(\tau)}{\tau^\beta}, \ 0 < \alpha_-(\tau), \alpha_+(\tau) \le M_\alpha, \quad (4)$$

для некоторого числа β, $0 < \beta \le 1$, и постоянной M_α.

Здесь изучены свойства введенных для выделения особенностей краевого условия функций $P_+(z)$, $P_-(z)$, в частности, доказано представление

$$P_+(z) = z^{\kappa_+} A_+(z),$$

в котором аналитическая в верхней полуплоскости функция $A_+(z)$ ограничена и обращается в нуль порядка κ_k, только в точках t_k

В зависимости от индекса получены формулы общего решения, выписаны условия существования и единственности решения, которые имеют традиционный для задачи Гильберта с конечным индексом вид.

В пункте 1.1.3 задача Гильберта рассмотрена в случае, когда коэффициенты краевого условия имеют счетное множество точек разрыва первого рода, причем ряд, составленный из дробных частей скачков функции $\nu(t)/\pi$, расходится, но индекс задачи конечен. Решение задачи ищется в классе аналитических в верхней полуплоскости функций, имеющих интегрируемые особенности в точках t_k и особенность порядка меньше единицы на бесконечности.

Считается выполненным условие (2), последовательность точек $\{t_k\}$ удовлетворяет ограничению

$$l < \frac{t_{k+1} - t_k}{t_k^{\alpha}} < L, \quad l > 0,\ 0 < \alpha < 1 - \kappa_+, \tag{5}$$

существуют числа $\Delta_+ > 0$, $\kappa_+ \in (0,1)$, такие, что

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{n_+^*(\tau)}{\tau^{\kappa_+}} = \Delta_+, \tag{6}$$

и для кусочно непрерывной функции $\varepsilon(\tau) = \Delta_+\tau^{\kappa_+} - n_+^*(\tau)$, сходятся несобственные интегралы

$$\int_1^{+\infty} \frac{\varepsilon(\tau)}{\tau} d\tau = M_+ < +\infty, \quad \left(\int_1^{+\infty} \varepsilon(\tau)^p d\tau\right)^{1/p} = M_p < +\infty,\ p > 1. \tag{7}$$

Аналитическое выделение счетного числа особенностей у коэффициента краевого условия, записанного в виде

$$\mathrm{Re}[e^{-i\varphi(t)}F(t)] = \frac{c(t)}{|G(t)|\cos(\beta t)}, \tag{8}$$

проводится при помощи функции $P_+(z)$. Здесь же исследуются асимптотическое поведение $P_+(z)$ при $z \to \infty$ и гладкость граничных значений этой функции. Введя функции

$$\varphi_2(t) = \varphi(t) + \arg P_+(t) - \kappa_\infty \arg(t+i) + \pi\Delta_+ t^{\kappa_+} - \kappa_0 \arg\frac{t}{t+i} - \frac{\kappa - \kappa_0}{2}\arg\frac{t-i}{t+i},$$

$$\Gamma_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_2(\tau)d\tau}{\tau - t},$$

$$c_2(t) = \frac{e^{-\Gamma_0(t)}c_1(t)|P_+(t)||t/(t+i)|^{-\kappa_0/2}|(t-i)/(t+i)|^{(\kappa_0-\kappa)/2}}{|t+i|^{\kappa_\infty}\exp\{\pi\Delta_+\cos(\kappa_+(\pi-\theta))|t|^{\kappa_+}/\sin(\pi\kappa_+)\}},$$

определим искомую функцию $F(z)$ при $\kappa - \kappa_0 \geq 0$ формулой

$$\begin{gathered} F(z) = \frac{((z-i)/(z+i))^{(\kappa-\kappa_0)/2}\exp\{\pi\Delta_+ e^{-i\pi\kappa_+}z^{\kappa_+}/\sin(\pi\kappa_+)\}}{e^{-\Gamma(z)}P_+(z)(z+i)^{-\kappa_\infty}(z/(z+i))^{-\kappa_0/2}}\times \\ \times\left[\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c_2(t)}{t-z}dt + \sum_{k=0}^{(\kappa-\kappa_0)/2}\left(C_k\Big(\frac{z+i}{z-i}\Big)^k - \overline{C}_k\Big(\frac{z-i}{z+i}\Big)^k\right)\right], \end{gathered} \tag{9}$$

где $C_k = A_k + iB_k$– произвольные постоянные, причем в случае нечетного κ должно выполняться равенство

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{c_2(t)}{t}dt + iB_0 + 2i\sum_{k=0}^{(\kappa+1)/2}(-1)^k B_k = 0. \tag{10}$$

Если же $\kappa-\kappa_0$– отрицательное число, то определим $F(z)$ формулой

$$F(z) = \Big(\frac{z-i}{z+i}\Big)^{(\kappa-\kappa_0)/2}\frac{e^{\Gamma(z)}\exp\{\pi\Delta_+ e^{-i\pi\kappa_+}z^{\kappa_+}/\sin(\pi\kappa_+)\}}{P_+(z)(z+i)^{-\kappa_\infty}\big(z/(z+i)\big)^{-\kappa_0/2}}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{c_2(t)}{t-z}dt, \tag{11}$$

в которой $c_2(t)$ удовлетворяет условиям разрешимости

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{c_2(t)}{(t-z)^k}dt = 0, \quad k = \overline{1, -(\kappa-\kappa_0)/2-1}, \tag{12}$$

а в случае $\kappa = -1$ еще и равенству (10), в котором все B_k равны нулю.

Теорема 3 *Пусть последовательность точек t_k удовлетворяет условиям (5), существуют конечные пределы (2) и для некоторого числа κ_+, $0 < \kappa_+ < 1$, существует отличный от нуля предел (6), функция $\varepsilon(\tau)$ удовлетворяет условиям (7), функция $c(t)/G(t)$ удовлетворяет условию Гельдера в любом замкнутом интервале $[t_k, t_{k+1}]$ с показателем $\alpha \in (0,1)$. Тогда при $(\kappa-\kappa_0)/2 \geq 0$ решение неоднородной задачи (8) в рассматриваемом классе функций определяется формулой (9), причем при нечетном κ с дополнительным условием (10); если $\kappa-\kappa_0$ – отрицательное четное, то решение представляется формулой (11) с дополнительными условиями разрешимости в виде системы (12), а при нечетном κ еще и с условием (10).*

§1.2 посвящен исследованию задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов, в ситуации, когда дробные части $\kappa_k > 0$ скачков функции $\nu(t)/\pi$ в точках t_k накапливаясь, обращают индекс задачи в плюс бесконечность. Используется метод регуляризующего множителя для краевого условия с предварительным аналитическим выделением особенностей специально построенной аналитической функцией. Считается, что функция $n_+^*(t)$ удовлетворяет условию (6), выводится интегральное представление

$$\ln P_+(z) = \frac{\pi\Delta_+ e^{-i\kappa_+\pi}}{\sin\pi\kappa_+} z^{\kappa_+} + I_+(z), \quad I_+(z) = -z\int\limits_0^{+\infty} \frac{n_+^*(\tau) - \Delta_+\tau^{\kappa_+}}{\tau(\tau - z)} d\tau,$$

где[8] $I_+(re^{i\theta}) = \mathrm{o}(\mathrm{r}^{\kappa_+}),\ \mathrm{r} \to +\infty,\ -\pi + \delta < \theta < 2\pi - \delta.$

При дополнительном ограничении на последовательность точек t_k

$$n_+^*(t_k) - \Delta_+(t_k)^{\kappa_+} = \Delta_+(t_{k+1})^{\kappa_+} - n_+^*(t_k) = p_k,\ p_k > 0, \tag{13}$$

причем

$$\inf\{p_k\} = p_0^+ > 0, \tag{14}$$

доказывается более точная асимптотическая оценка.

Лемма 7 *При выполнении условий (6), (13), (14) справедливо представление*

$$P_+(z) = \exp\{z^{\kappa_+}\pi\Delta_+ e^{-i\kappa_+\pi}/\sin\pi\kappa_+\} \cdot \exp\{I_+(z)\}, \tag{15}$$

в котором функция $\exp\{I_+(z)\}$ *обращается в нуль порядка* κ_k *только в точках* t_k, $k = \overline{1,\infty}$, *и является ограниченной в* $\overline{D}$.

Краевое условие (8) записывается так

$$\mathrm{Re}\left[e^{-i\varphi_1(t)} F(t) P_+(t)\right] = \tilde{c}_1(t), \tag{16}$$

где $\varphi_1(t) = \varphi(t) + \arg P_+(t), \quad \tilde{c}_1(t) = c(t)|P_+(t)|/|G(t)|\cos(\beta(t)\pi)$. Определяется аналитическая ограниченная в области D функцию

$$\Gamma(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(\tau)\frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Рассматривается соответствующая (16) однородная задача, краевое условие которой имеет вид

$$\mathrm{Im}\left\{ie^{-\Gamma^+(t)} F(t) P_+(t)\right\} = 0. \tag{17}$$

Решение последней задачи ищется в классе $\tilde{B}$ аналитических в D функций $F(z)$ с ограниченным вблизи точки t_j для всех $j = 1, 2, \cdots$, произведением $|F(z)||z - t_j|^{\kappa_j}$, а также в классе B_* функций $F(z)$ с ограниченным в области D произведением $|F(z)|e^{\mathrm{Re} I_+(z)}$. Справедлива

[8] Хейман У. Мероморфные функции . – М.: Мир, 1966. – 287 с., С.178

Теорема 5 *Для того, чтобы однородная краевая задача (17) имела решение $F(z)$ класса B_* необходимо и достаточно справедливости формулы $ie^{-\Gamma^+(z)}F(z)P_+(z) = \Phi(z)$, в которой $\Phi(z)$ является целой функцией порядка $\rho_\Phi \leq \kappa_+$, удовлетворяющей при больших $|t|$ – неравенствам*

$$|\Phi(t)| \leq C \exp\Big\{\frac{\pi\Delta_+ \cos(\kappa_+\pi)}{\sin(\pi\kappa_+)} t^{\kappa_+}\Big\}, \quad t > 0, \tag{18}$$

$$|\Phi(t)| \leq C \exp\Big\{\frac{\pi\Delta_+}{\sin(\pi\kappa_+)} |t|^{\kappa_+}\Big\}, \quad t < 0, \tag{19}$$

и принимающей на L вещественные значения.

Теорема 6 *Общее решение однородной краевой задачи (17) в классе функций B_* определяется формулой*

$$F(z) = \frac{-ie^{\Gamma(z)}\Phi(z)}{P_+(z)}, \tag{20}$$

в которой $\Phi(z)$ есть произвольная целая функция порядка $\rho_\Phi \leq \kappa_+$, принимающая на L действительные значения и при $\rho_\Phi = \kappa_+$ удовлетворяющая неравенствам (18), (19) для достаточно больших $|t|$.

Доказано, что такая задача с индексом равным плюс бесконечность имеет счетное множество линейно независимых решений.

Частное решение неоднородной задачи (16)ищется в классе B_* при дополнительном предположении, что $c(t) = \tilde{c}(t)/(1+t^2)$, где $\tilde{c}(t)$ – функция ограниченная и удовлетворяющая условию Гельдера на интервалах (t_k, t_{k+1}), $k = \overline{1, \infty}$. Доказано, что в качестве такого решения можно взять функцию

$$F_1(z) = e^{\Gamma(z)} \cdot \frac{\Phi_1(z)}{P_+(z)} \cdot \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{\tilde{c}_2(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad \tilde{c}_2(t) = \frac{\tilde{c}(t)}{|G(t)|} \frac{|P_+(t)|}{\Phi_1(t)} \frac{\cos(\beta(t)\pi)}{e^{\Gamma(t)}(1+t^2)},$$

где $\Phi_1(z)$ построенная по специально выбранной последовательности нулей целая функция порядка κ_+ с заданным поведением на бесконечности, принимающая на L вещественные значения.

Теорема 8 *Общее решение неоднородной краевой задачи (16) в классе B_* представляется как сумма частного решения $F_1(z)$ этой задачи и общего решения (20) соответствующей однородной задачи.*

Глава 2. Задача Гильберта с неограниченным изменением непрерывной составляющей $\arg G(t)$ и счетным множеством точек разрыва коэффициентов

Вторая глава содержит обобщение метода регуляризующего множителя на случай задачи Гильберта с неограниченным ростом непрерывной составляющей аргумента коэффициента краевого условия и, как следствие, с бесконечным индексом. Здесь же подробно исследован случай задачи с неограниченным ростом как непрерывной составляющей так и функции скачков аргумента коэффициента краевого условия.

Задача Гильберта для полуплоскости в ситуации, когда коэффициенты краевого условия непрерывны на любом конечном интервале вещественной оси, а индекс задачи обращается в бесконечность в силу степенной или логарифмической особенности функции $\nu(t)$ при $t \to \infty$, рассматривалась в работах И.Е. Сандрыгайло[9], П.Ю. Алекна[10], соответственно, где решение задачи методом Н.И.Мусхелишвили[11], сводилось к решению и исследованию более сложной краевой задачи Римана.

В §2.1 метод регуляризующего множителя Ф.Д. Гахова обобщен на случай задачи с бесконечным индексом. Этим методом решена задача Гильберта для полуплоскости с непрерывными на интервале $(-\infty, +\infty)$ коэффициентами в случае, когда аргумент функции $G(t)$

$$\nu(t) = \begin{cases} \nu^- t^\rho + \tilde{\nu}(t), & t > 0, \\ \nu^+ |t|^\rho + \tilde{\nu}(t), & t < 0, \end{cases} \tag{21}$$

где $0 < \rho < 1$, ${\nu^-}^2 + {\nu^+}^2 \neq 0$, $\tilde{\nu}(t)$ – функция класса $H_L(\mu)$.

Вначале рассмотрена однородная задача, для которой предложен ре-

[9] Сандрыгайло И.Е. О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости// Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. – 1974. – № 6. – С. 16–23.

[10] Алекна П.Ю. Краевая задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости// Лит. матем. сб. – 1977. – № 1. – С. 5–12.

[11] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с., С.139-155

гуляризующий множитель вида $e^{-\Gamma_0(t)}e^{Q(t)}$, $\Gamma_0(t) = \operatorname{Re}\Gamma^+(t)$,

$$Q(t) = \begin{cases} (\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+)t^\rho/\sin(\pi\rho), & t > 0, \\ (\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho))|t|^\rho/\sin(\pi\rho), & t < 0, \end{cases}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\nu}(t)\frac{dt}{t-z}.$$

Краевое условие записывается в виде

$$\operatorname{Re}\left[e^{-\Gamma^+(t)}e^{-ile^{i\alpha}t^\rho}F(t)\right] = 0, \qquad (22)$$

где $-ile^{i\alpha}z^\rho-$ решение задачи Шварца для $Q(t)$ в верхней полуплоскости.

Теорема 11 *Общее решение однородной краевой задачи (22) дается формулой*

$$F(z) = -ie^{\Gamma(z)}e^{ile^{i\alpha}z^\rho}\Phi(z), \qquad (23)$$

где $\Phi(z)$ произвольная целая функция, порядок которой не превосходит ρ, принимающая вещественные значения на границе области D подчиненные условию

$$|\Phi(t)| \leq Ce^{Q(t)}, \quad C = const. \qquad (24)$$

Полная картина разрешимости задачи (22) составлена для $\rho < 1/2$ и содержится в следующей теореме.

Теорема 12 *Пусть $\rho < 1/2$. Тогда однородная краевая задача a) не имеет нетривиальных ограниченных решений, если $\nu^- \cos(\pi\rho) < \nu^+$, либо $\nu^+ \cos(\pi\rho) > \nu^-$; b) имеет единственное решение, если $\nu^- \cos(\pi\rho) = \nu^+$, $\nu^+ \cos(\pi\rho) < \nu^-$, либо $\nu^+ \cos(\pi\rho) = \nu^-$, $\nu^- \cos(\pi\rho) > \nu^+$; c) имеет бесконечное множество решений, если $\nu^- \cos(\pi\rho) > \nu^+$, $\nu^+ \cos(\pi\rho) < \nu^-$.*

Утверждение c) теоремы 12 впервые другим методом и в более узком классе ограниченных функций с экспоненциальным убыванием на бесконечности доказаны в работе И.Е. Сандрыгайло[12].

Общее решение неоднородной задачи представлено в виде суммы общего решения (23) соответствующей однородной задачи и построенного в пункте 2.1.3 частного решения неоднородной задачи. Нахождению последнего предшествует отыскание канонического решения задачи (22), опирающееся на конструктивное построение целой функции с заявленными свойствами.

В §2.2 изучается задача с краевым условием вида (8), в котором функция $\nu(t)$ имеет непрерывную составляющую с представлением (21), а функцию скачков – с разрывами, образующими расходящийся знакоположительный ряд. Таким образом, здесь рассмотрена задача, объединяющая особенности задач §1.2 и §2.1.

Именно, краевое условие (1) выполняется всюду на L, исключая точки $t_k,\ t_{-k},\ \ k = \overline{1,\infty},\ \ 0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots,\ \ \lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$, $0 > t_{-1} > \cdots > t_{-k} > t_{-k-1} > \cdots,\ \lim\limits_{k\to\infty} t_{-k} = -\infty$. Вводятся бесконечные произведения $P_+(z)$, $P_-(z)$, функция $\varphi_1(t) = \varphi(t) + \arg P_+(t) + \arg P_-(t)$, краевое условие (8) записывается так

$$\mathrm{Re}[e^{-i\varphi_1(t)}F(t)P_+(t)P_-(t)] = c_1(t), \tag{25}$$

где $c_1(t) = c(t)|G(t)|^{-1}|P_+(t)||P_-(t)|\cos(\beta(t)\pi)$. В предположении справедливости для функции $\varphi_1(t)$ представления (21), условий

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{n_+^*(x)}{x^{\kappa_+}} = \Delta_+, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{n_-^*(x)}{x^{\kappa_-}} = \Delta_-,$$

с положительными постоянными Δ_+, Δ_-, $0 < \kappa_- < 1$, $0 < \kappa_+ < 1$, и дополнительным ограничением симметрии вида (13), формулируются теоремы.

Теорема 21 *Для того, чтобы однородная краевая задача в классе $\tilde{B}$ имела решение $F(z)$, необходимо и достаточно справедливости для*

[12] Сандрыгайло И.Е. О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости// Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. – 1974. – № 6. – С. 16–23.

этого решения формулы

$$\Phi(z) = ie^{-\Gamma^{+}(z)}e^{-iP(z)+Q(z)}F(z)P_{+}(z)P_{-}(z), \qquad (26)$$

в которой $\Phi(z)$*– целая функция, принимающая действительные значения на* L.

Решение однородной задачи, соответствующей (25), будем искать в классе $\ddot{B}$ функций $F(z)$ с ограниченным произведением $|F(z)|e^{\mathrm{Re}I_{+}(z)}e^{\mathrm{Re}I_{-}(z)}$.

Теорема 22 *Для того, чтобы однородная краевая задача при* $\rho > \max\{\kappa_{+}, \kappa_{-}\}$ *имела решение* $F(z)$ *класса* $\ddot{B}$ *необходимо и достаточно, чтобы для* $F(z)$ *выполнялась формула (26) с целой функцией* $\Phi(z)$ *порядка* $\rho_F \leq \rho$, *удовлетворяющей условию* $\mathrm{Im}\Phi_{+}(t) = 0, \quad t \in L$, *и на контуре* L *для достаточно больших* $|t|$*– неравенствам*

$$|\Phi(t)| \leq Ce^{\frac{\nu^{-}\cos(\pi\rho)-\nu^{+}}{\sin(\pi\rho)}t^{\rho}}e^{\frac{\pi\Delta_{+}\cos(\kappa_{+}\pi)}{\sin(\pi\kappa_{+})}t^{\kappa_{+}}}e^{\frac{\pi\Delta_{-}}{\sin(\pi\kappa_{-})}t^{\kappa_{-}}}, \quad t > 0,$$

$$|\Phi(t)| \leq Ce^{\frac{\nu^{-}-\nu^{+}\cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)}|t|^{\rho}}e^{\frac{\pi\Delta_{+}}{\sin(\pi\kappa_{+})}|t|^{\kappa_{+}}}e^{\frac{\pi\Delta_{-}\cos(\kappa_{-}\pi)}{\sin(\pi\kappa_{-})}|t|^{\kappa_{-}}}, \quad t < 0.$$

При различных значениях параметров ρ, κ_{+}, κ_{-} изучена разрешимость однородной задачи в классе функций с особенностями интегрируемого порядка в точках разрыва коэффициентов и с заданным асимптотическим поведением на бесконечности, а так же в классе ограниченных функций. Например, доказана

Теорема 25 *Если* $\nu^{-} - \nu^{+} < 0$, $\rho > \max\{\kappa_{+}, \kappa_{-}\}$, *то однородная краевая задача в классе* $\ddot{B}$ *имеет только нулевое решение.*

Получены формулы общего решения и исследована разрешимость неоднородной задачи (25) в указанных классах функций в ситуациях, когда $\kappa_{+} = \kappa_{-}$ и $\kappa_{+} \neq \kappa_{-}$.

Глава 3. Решение некоторых обратных и обратных смешанных задач

В третьей главе приведены применения результатов первых двух глав к некоторым обратным и смешанным обратным краевым задачам. Смешанная обратная краевая задача – задача об отыскании области с частично неизвестной границей и аналитической в этой области функции по заданным граничным условиям. Такая задача по параметру x была поставлена и исследована В.Н. Монаховым[13] , выделившим важный частный случай, когда известная часть границы искомой области является полигоном. Использовав полученные для этого частного случая результаты при помощи аппроксимации В.Н. Монахов исследовал разрешимость обратной смешанной краевой задачи с заданным произвольным спрямляемым участком границы. Дальнейшее развитие данное направление получило в работах С.Р. Насырова[14] и С.Р. Тлюстен[15]. В статье[16] поставлена и решена задача, отличающаяся от задачи В.Н. Монахова тем, что полигон здесь определен не полностью: неизвестны длины отрезков ломаной. Это позволило применить метод решения, значительно снижающий жесткие ограничения на углы полигона.

Ниже предлагаются обобщения задачи из работы[16] на случай счетного множества вершин полигона и на случай решетки контуров. В частности, получено обобщение (на случай бесконечного числа вершин) одной обратной задачи М.А. Лаврентьева о построении конформного отображения полуплоскости с заданными прообразами вершин на многоугольник с заданными внутренними углами при неизвестных вершинах.

В §3.1 рассматривается одна обратная смешанная краевая задача об определении области D_z и аналитической в этой области функции, отображающей D_z на заданную область D_w, если известно, что часть границы D_z есть полигон с заданными углами при счетном множестве неизвестных вершин, известны точки на ∂D_w- образы неизвестных вершин, на другой части искомого контура ∂D_z заданы краевые значения искомой аналитической функции в виде последовательности функций пере-

[13]Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. – Новосибирск: Наука, 1977. – 424 с., С. 108.

[14]Насыров С.Р. Смешанная обратная краевая задача на римановых поверхностях// Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 10. – С. 25–36.

[15]Тлюстен С.Р. Смешанная краевая задача со свободной границей в неоднолистных областях// Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1986. – № 76. – С. 148–156.

[16]Салимов Р.Б., Стрежнева Е.В. К решению обратной смешанной краевой задачи// Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1992. – Вып. 27. – С. 95–117.

менной $x = \operatorname{Re} z$. Получено общее решение этой задачи.

В §3.2 рассмотрена задача о построении конформного отображения полуплоскости на многоугольник, если заданы величины углов при неизвестных вершинах и прообразы вершин на вещественной оси в случае счетного множества вершин. В случае конечного числа вершин такая обратная задача рассмотрена М.А. Лаврентьевым [17].

Пусть $\{t_k\}$, $\{t_{-k}\}$, $k = \overline{1,\infty}$,– заданные последовательности точек вещественной оси, сходящиеся к $+\infty$, $-\infty$ соответственно, $-\infty < \ldots < t_{-k} < \ldots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots < +\infty$, $\quad t_0 = 0$. Заданы последовательности действительных чисел $\alpha_{-k} \in (0,1)$, $\alpha_k \in (0,1)$, $k = \overline{1,\infty}$. Требуется определить функцию, конформно отображающую полуплоскость $G = \{\zeta = \xi + i\eta, \eta > 0\}$ на многоугольник D_z в плоскости $z = x+iy$, внутренний угол которого при вершине A_k (A_{-k}), отвечающей точке t_k (t_{-k}) действительной оси плоскости ζ равен $\alpha_k\pi$ $(\alpha_{-k}\pi)$.

Разобраны две ситуации: в одном случае более жесткие ограничения налагаются на углы многоугольника, в другом - на прообразы вершин. Так, например в предположении существования конечных пределов

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\kappa_j = \kappa_+, \quad \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\kappa_{-j} = \kappa_-$$

для последовательностей чисел $\kappa_k = 1 - \alpha_k$, $\kappa_{-k} = 1 - \alpha_{-k}$, условий (3), (4), и ограничений $0 < \tau_+ < \kappa_- + \kappa_+ - 1$, $0 < \tau_- < \kappa_- + \kappa_+ - 1$ на показатели сходимости последовательностей $\{t_k\}$, $\{t_{-k}\}$, доказана следующая формула для искомого отображения

$$z(\zeta) = -C\int\limits_0^{\zeta}\frac{e^{i\pi\beta_0}d\zeta}{\prod\limits_{j=1}^{\infty}(1-\zeta/t_{-j})^{\kappa_{-j}}\prod\limits_{j=1}^{\infty}(1-\zeta/t_j)^{\kappa_j}} + K, \quad \zeta \in G,$$

K – произвольная комплексная постоянная, $\beta_0 \in (-1/2, 1/2)$, распространяющая на случай счетного числа вершин многоугольника известный интеграл Шварца–Кристофеля.

[17]Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с., С. 179

§3.3 посвящен решению внешней обратной краевой задачи по определению области D_z, содержащей бесконечно удаленную точку с границей $L_z = L_z^1 \cup L_z^2$ и аналитическую в этой области функцию $w(z)$ по заданным в виде функции при комбинации параметров на неизвестной границе искомой области краевым значениям $w(z)$.

В частности, здесь рассмотрена следующая задача. Требуется найти форму замкнутого жорданова контура L_z, если на нем значения функции $w(z)$ заданы в виде

$w = \varphi_*(\theta) + i\psi_*(\theta),\ \alpha \le \theta \le 2\pi - \beta, \quad$ на L_z^2,

где $\theta = \arg z$, причем $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$,

$w = \varphi(y) + i\psi(y),\ -b \le y \le b, \quad$ на L_z^2,

и эти значения в плоскости w определяют замкнутый жордановый контур L_w.

Для решения этой задачи мы не можем воспользоваться известными результатами[18], т.к. здесь отображение единичного круга на искомую область D_z обязано иметь простой полюс. Решение задачи сводится к решению одной краевой задачи Гильберта с кусочно непрерывными коэффициентами. Получена формула решения задачи. Доказаны условия однолистности решения.

Обратная смешанная задача для решетки контуров решена в §3.4. Здесь требуется определить бесконечно связную область D_z, т.е. контур и шаг решетки, и аналитическую в этой области функцию $w(z)$ по заданному образу $D_w = w(D_z)$, в случае, когда часть искомого контура является полигоном с заданными углами при неизвестных вершинах, на ∂D_w заданы образы вершин при искомом отображении, а на оставшейся части искомого контура заданы краевые значения функции $w(z)$ в виде функции переменной $x = \operatorname{Re} z$. Получены формулы, дающие решение задачи, доказаны достаточные и необходимые условия разрешимости. Результаты этого параграфа обобщают на случай бесконечносвязной об-

[18]Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с., С.308-313

ласти с периодической границей результаты статьи Р.Б. Салимова и Е.В. Стрежневой[19]

Глава 4. Некоторые геометрические свойства аналитических функций

Глава 4 содержит результаты исследований в следующем направлении. Часто решение прикладных краевых задач с неизвестными границами на плоскости сводится к отысканию конформного отображения заданной области на искомую. При этом производная искомой функции определяется как решение некоторой краевой задачи. По физическому смыслу задач искомые области должны быть однолистными. Для обеспечения последнего требуется создание критериев однолистности аналитических функций в различных областях и обоснования с их помощью критериев однолистности отображений по характеристикам краевых значений этих отображений. В качестве таких характеристик часто выступают ограничения на гладкость краевых значений.

Л.А. Аксентьевым[20] дана формулировка сильной и слабой проблем однолистной разрешимости обратных краевых задач. Первая проблема заключается в определении ограничений на краевые условия, которые гарантируют однолистность решения обратной краевой задачи. Для решения этой задачи нужны условия в различных областях, тогда как при решении слабой проблемы однолистности требуются условия в канонических областях, так как слабая проблема предполагает знание функции Римана области.

§4.1 посвящен созданию достаточных условий однолистности функций $f(z)$, аналитических в звездных и выпуклых областях D. Условия имеют вид ограничений на скорость роста отношения $|f''(w)/f'(w)|$ в терминах коэффициента гиперболической метрики. Доказательства основаны на продолжении функции из области до квазиконформного отоб-

[19]Салимов Р.Б., Стрежнева Е.В. К решению обратной смешанной краевой задачи// Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1992. – Вып. 27. – С. 95–117.

[20]Аксентьев Л.А. Об однолистной разрешимости обратных краевых задач// Тр. семин. по краев. задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та. 1973. – Вып. 10, С. 11 – 24.

ражения всей плоскости на себя с последующим применением теоремы Адамара. Данный метод разработан в трудах Альфорса и Вейля [21], Геринга[22] и развит в работах Ф.Г. Авхадиева и других авторов (см. обзор[23]). Для примера приведем следующий результат.

Пусть область $D_0(\alpha)$, $\partial D_0(\alpha) = L_0$, получается как образ верхней полуплоскости $D = \{\zeta : \mathrm{Im}\zeta > 0\}$ при отображении аналитической функцией $w(\zeta)$, удовлетворяющей условию

$$|\arg w'(\zeta)| < \frac{\alpha\pi}{2}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Пусть $f(w)$ – аналитическая в области $D_0(\alpha)$ функция, такая, что $\lim[f(w)/w] > 0$, $\rho_D(w)$ – коэффициент гиперболической метрики области D в точке $w \in D$, $A[D_0(\alpha)] = \pi/2\beta \mathrm{tg}(\beta/2)$, $\beta = (1-\alpha)\pi/2$. Если в каждой точке $w \in D_0(\alpha)$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{f''(w)}{f'(w)}\right| \leq \frac{k\rho_{D_0(\alpha)}(w)}{A[D_0(\alpha)]}, \quad \varphi = \arg w, \quad k < 1,$$

то $f(w)$ однолистна в $D_0(\alpha)$ и допускает K-квазиконформное продолжение $(K = (1+k)/(1-k))$ на всю плоскость.

Этот параграф содержит также некоторые новые достаточные условия однолистности аналитических в единичном круге E функций.

Известно[24], что если аналитическая в единичном круге E функция удовлетворяет условию

$$\left|\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| < \frac{1}{1-|\zeta|^2}, \quad \zeta \in E, \tag{27}$$

то она однолистна в E.

---

[21] Ahlfors L.V., Weil G. A uniqueness theorem for Beltrami equations// Proc. Amer. Math. Soc. – 1962. – V. 13. – № 6. – P. 975–978.

[22] Gehring F.W. Univalent functions and the Schwarzian derivative// Comment. math. helv. 1977, v.52, № 4, p.561 – 572.

[23] Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А., Елизаров А.М. Достаточные условия конечнолистности аналитических функций и их приложения// Итоги науки и техники. Серия "Матем. анализ". – М.: ВИНИТИ, 1987. – Т. 25. – С. 3–121.

[24] Becker. J. Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortset-zbare schlichte Funktionen// J. Reine und Angew. Math. V, 255 (1972), S. 23–43.

Пусть теперь функция $f(\zeta)$ аналитична в единичном круге E и удовлетворяет условию Беккера (27) не во всем круге E, а в некотором кольце $E[q,1) = \{\zeta : q \leq |\zeta < 1\}$. Ясно, что функция, удовлетворяющая такому условию будет конечнолистной. Возникает вопрос, как дополнительно характеризовать $f(\zeta)$ в оставшейся части круга $E_q = \{\zeta : |\zeta| < q\}$, чтобы гарантировать однолистность $f(\zeta)$ в E. Пример функции $e^{a\zeta}$, $a > \pi$ показывает, что, вообще говоря, для этого недостаточно требовать просто однолистности $f(\zeta)$ в E_q. Поэтому будем предполагать, что кроме неравенства Беккера в $E[q,1)$ функция $f(\zeta)$ будет удовлетворять некоторым аналитическим условиям в E_q. Справедлива

Теорема 48 *Если аналитическая в E функция $f(\zeta)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, удовлетворяет условиям*

$$|arg f'(\zeta)| < \arccos q, \quad \zeta \in \overline{E}_q,$$

$$\Big|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\Big| < \frac{1}{1 - |\zeta|^2}, \quad \zeta \in E[q,1),$$

то $f(\zeta)$ будет однолистной в E.

Отметим, что условия однолистности такого типа позволяют дополнительно характеризовать геометрические свойства однолистного отображения внутри круга.

В §4.2 решается задача о продолжимости условия Гельдера с границы внутрь произвольной односвязной области для гармонической в этой области и непрерывной вплоть до границы функции. Введена характеристика области в терминах которой сформулировано достаточное условие совпадения показателя в условии Гельдера на границе и внутри области, т.е. рассмотрен вопрос о выполнении неравенства

$$|U(z_1) - U(z_2)| < K|z_1 - z_2|^\alpha, \ \ \forall z_1, z_2 \in \overline{G},$$

для гармонической в односвязной ограниченной области G и непрерывной в $\overline{G}$ функции $U(z)$, удовлетворяющей на границе области ∂G условию Гельдера с тем же показателем α.

В единичном круге такой результат для произвольного показателя $\alpha \in (0,1)$ доказан И.И. Приваловым[25] и обобщен П.М. Тамразовым[26] на случай модуля непрерывности $\omega(U,t) = \sup |U(z_1) - U(z_2)|,\ |z_1 - z_2| \le t$, удовлетворяющего условию

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(U,t)}{t} dt < +\infty.$$

На произвольную односвязную область при существенных ограничениях на модуль непрерывности результат распространен в работе[27]. В случае односвязной области с квазиконформной границей контурно телесные свойства гармонических функций изучались В.В. Андриевским[28].

Для произвольной односвязной ограниченной области G введем следующую характеристику

$$\beta = \sup_{w \in E} \frac{1}{2}\Big|(1 - |w|^2)\frac{z''(w)}{z'(w)} - 2\overline{w}\Big|,$$

$z(w)$– функция Римана области G. Известно, что $\beta \le 2$. Нетрудно убедиться в справедливости неравенства $\beta \ge 1$. Справедлива

Теорема 53 *Если функция $U(z)$, гармоническая в области G и непрерывная в $\overline{G}$ удовлетворяет условию*

$$|U(\zeta_1) - U(\zeta_2)| \le K|\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{\beta^2} \quad \forall \zeta_1, \zeta_2 \in \partial G,$$

то справедливо неравенство

$$|U(z_1) - U(z_2)| \le K\Big(1 + \frac{2}{\alpha}\Big)K^2(\alpha)|z_1 - z_2|^\alpha \quad \forall z_1, z_2 \in G.$$

Следует отметить, что из результатов Элгина Джонстона следует, что с границы внутрь области всегда продолжается условие Гельдера с показателем $\alpha \le 1/2$.

---

[25]Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. 2-е изд. М.: 1966. 628 с., С. 400

[26]Тамразов П.М. Гладкости и полиноминальные приближения. Киев, 1975. 271 с., С.127

[27]Elgin H. Johnston The boundary modulus of continuity of harmonic functions// Pacific Journal of math. – 1980, v. 90, № 1. – P. 87–98.

[28]Андриевский В.В. О контурно-телесных свойствах гармонических функций// Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 12. – С. 13–21.

Результаты §4.1 находят применение в следующем §4.3 при обосновании критерия однолистности общего решения обратной краевой задачи теории аналитических функций, которое представляет собой семейство областей, определяемых отображением круга E функциями вида[29] (см. также[30])

$$z(\zeta) = \int\limits_0^{\zeta} \exp\Big\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} S(\zeta e^{-i\theta})d\nu(\theta)\Big\}d\zeta, \quad \zeta \in E, \tag{28}$$

$$\nu(\theta) = \int p(\theta)d\theta + \nu_s(\theta), \quad S(\zeta) = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}.$$

Здесь суммируемая функция $p(\theta)$ определяется по граничным значениям задачи с использованием функции Римана области D_w, ограниченной кривой с заданным уравнением в натуральном параметре. Невозрастающая непрерывная с производной, почти везде равной нулю, функция $\nu_s(\theta)$ выбирается произвольно. Однолистность отображения (28) с $\nu_s(\theta) \not\equiv \mathrm{const}$ впервые исследовалась в работе[31], где доказано существование постоянных k_0, $0 < k_0 = k_0(z(\zeta))$ и k_s, $k_s = k_s(z(\zeta))$ таких, что включение в класс квазигладких функций Зигмунда $\nu(\theta) \in \Lambda_{k_0}$ ($\nu(\theta) \in \Lambda_{k_s}$) является достаточным (необходимым) условием однолистности $z(\zeta)$ в E. В данном параграфе обоснованы оценки $1/3,37 < k_0 < k_S < 21$, являющиеся этапом исследований в данном направлении, где лучший результат $\pi^2/20 < k_0 < k_s < 12$ принадлежит Ф.Г.Авхадиеву [32].

§4.4 содержит ряд результатов по однолистной разрешимости обратной смешанной краевой задачи по параметру x. В теореме 61 приведено достаточное условие однолистности решения указанной задачи, выраженное непосредственно через исходные данные. Формулировки еще

[29] Гахов Ф.Д. Об обратных краевых задачах// Ученые записки КГУ. – 1953. Т. 113. – кн. 10. С. 9–20.

[30] Андрианов С.Н. О существовании и числе решений обратной краевой задачи теории аналитических функций// Ученые записки КГУ. – 1953. Т. 113. – кн. 10. С. 21–30.

[31] Duren P., Shapiro M., Shields A. Singular measures and domains not of Smirnov tupe// Duke Math. J. – 1966. – 33:2. – P. 247–254.

[32] Авхадиев Ф.Г. Оценки в классе Зигмунда и их применение к краевым задачам// ДАН СССР. – 1989. – Т. 307. – № 6. – С. 1289–1292.

трех утверждений этого параграфа предполагают знание функции Римана заданной в условии задачи области D_w.

Автор выражает глубокую благодарность Р.Б. Салимову за постоянное внимание к работе.

Основные публикации автора по теме диссертации в журналах из официального перечня ВАК

[1] Абубакиров Н.Р. Внешняя обратная краевая задача при комбинировании двух параметров из декартовых координат и полярного угла / Н.Р. Абубакиров, Р.Б. Салимов, П.Л. Шабалин // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 10. – С. 3–9.

[2] Аксентьев Л.А. Условия однолистности с квазиконформным продолжением и их применение / Л.А. Аксентьев, П.Л. Шабалин // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 2. – С. 6–14.

[3] Салимов Р.Б. Однолистная разрешимость одной обратной смешанной краевой задачи/ Р.Б. Салимов, Е.В. Насырова, П.Л. Шабалин // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 4. – С. 78–82.

[4] Салимов Р.Б. Обратная смешанная краевая задача для бесконечносвязной области с периодической границей / Р.Б. Салимов, П.Л. Шабалин // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 6. – С. 80–83.

[5] Салимов Р.Б. Метод регуляризующего множителя для решения однородной задачи Гильберта с бесконечным индексом / Р.Б. Салимов, П.Л. Шабалин // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 4. – С. 76–79.

[6] Салимов Р.Б. К решению задачи Гильберта с бесконечным индексом / Р.Б. Салимов, Шабалин П.Л. // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73. – Вып. 5. – С. 724–734.

[7] Салимов Р,Б. Задача Гильберта. Случай бесконечного множества точек разрыва коэффициентов / Р.Б. Салимов, П.Л. Шабалин // Сиб. матем. журн. –2008. – Т. 49. – № 4. – С.898-915.

[8] Салимов Р.Б. Отображение полуплоскости на многоугольник с бес-

конечным числом вершин / Р.Б. Салимов, П.Л. Шабалин // Изв. вузов. Математика. – 2009. – № 10. – С. 76–80.

[9] Шабалин П.Л. Об однолистности общего решения внутренней обратной краевой задачи / П.Л. Шабалин // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 12. – С. 92–95.

[10] Шабалин П.Л. О продолжимости с границы внутрь области условия Гельдера для гармонических функций / П.Л. Шабалин // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 10. – С. 82–84.

[11] Шабалин П.Л. Один случай задачи Гильберта с особенностями коэффициентов/ П.Л. Шабалин // Известия Сарат. ун-та. Новая сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. – Т. 9. –вып. 1. – С. 58–67.

(Прочие публикации)

[12] Аксентьев Л.А. Условия однолистности в звездных и выпуклых областях / Л.А. Аксентьев, П.Л. Шабалин // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1983. – Вып. 20. – С. 35–42.

[13] Aksent'ev L.A. Sufficient conditions for univalence and quasiconformal extendibility of analytic functions / L.A. Aksent'ev, P.L. Shabalin // Handbook of Complex Analysis, Vol. 1: Geometric Function Theory. Edited bu R.Kühnau, Martin-Luther-Universität, Halle, Germany, 2002.– S. 169–206.

[14] Салимов Р.Б. Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения / Р.Б. Салимов, П.Л. Шабалин. - Казань: Изд-во Казанск. мат. о-ва, 2005. – 297 с.

[15] Севодин М.А. Об улучшении разделяющих постоянных в критерии однолистности решения одной обратной краевой задачи / М.А. Севодин, П.Л. Шабалин // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – Вып. 17. – С. 167–179.

[16] Шабалин П.Л. Классы однолистности и области В.И. Смирнова / П.Л. Шабалин // Труды семинара по краевым задачам. - Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1979. – Вып. 16. – С. 218–226.